

LBRIS

We know
books

George-Florin Șerban

MATEMATICĂ STANDARD

Aritmetică • Algebră • Geometrie

Clasa a V-a

Partea a II-a. Modulele 3, 4 și 5

EDITURA
COMPER

Capitolul 1. FRAȚȚII ORDINARE	3
Lecția 1. Frații ordinare. Clasificarea fracțiilor ordinare	3
Lecția 2. Frații echivalente	8
Lecția 3. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Frații ireductibile. Frații reductibile.....	12
Lecția 4. Reprezentarea fracțiilor pe axa numerelor. Cel mai mare divizor comun. Cel mai mic multiplu comun. Aducerea fracțiilor la un numitor comun.....	16
Lecția 5. Introducerea întregilor în fracție. Scoaterea întregilor din fracție. Compararea fracțiilor	21
<i>Test de autoevaluare</i>	26
Lecția 6. Adunarea fracțiilor ordinare	28
Lecția 7. Scăderea fracțiilor ordinare	33
Lecția 8. Înmulțirea fracțiilor ordinare	37
Lecția 9. Împărțirea fracțiilor ordinare	42
Lecția 10. Ridicarea la putere a unei fracții ordinare. Reguli de calcul cu puteri. Ordinea efectuării operațiilor	47
Lecția 11. Aflarea unei fracții dintr-un număr. Procente	53
<i>Test de autoevaluare</i>	57
Recapitulare și sistematizare prin teste	59
Capitolul 2. FRAȚȚII ZECIMALE.....	65
Lecția 1. Scrierea unei fracții ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă zecimală. Transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule într-o fracție ordinară	65
Lecția 2. Compararea, ordonarea, reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor zecimale. Aproximări	70
Lecția 3. Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule	73
Lecția 4. Înmulțirea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule	77
Lecția 5. Ridicarea la putere cu exponent natural a unei fracții zecimale care are un număr finit de zecimale nenule.....	81
<i>Test de autoevaluare</i>	86
Lecția 6. Împărțirea numerelor naturale cu rezultat fracție zecimală. Periodicitate	88
Lecția 7. Împărțirea a două fracții zecimale	93
Lecția 8. Ordinea efectuării operațiilor	97

Lecția 9. Media aritmetică a două sau mai multe fracții zecimale finite.....	102
Lecția 10. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții, în care intervin și unități de măsură.....	107
<i>Test de autoevaluare</i>	111
Recapitulare și sistematizare prin teste	113
 Capitolul 3. ELEMENTE DE GEOMETRIE	119
Lecția 1. Punctul. Dreapta. Planul	119
Lecția 2. Pozițiile relative a două drepte	123
Lecția 3. Semidreapta. Semiplanul.....	128
Lecția 4. Segmentul de dreaptă. Lungimea unui segment. Distanța dintre două puncte	132
Lecția 5. Segmente congruente. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de alt punct.....	136
<i>Test de autoevaluare</i>	140
Lecția 6. Unghiul. Măsura unui unghi. Operații cu măsuri de unghiuri..	142
Lecția 7. Unghiuri congruente.....	147
Lecția 8. Clasificarea unghiurilor	150
<i>Test de autoevaluare</i>	154
Recapitulare și sistematizare prin teste	156
 Capitolul 4. UNITĂȚI DE MĂSURĂ.....	160
Lecția 1. Unități de măsură pentru lungime. Perimetre. Transformări....	160
Lecția 2. Unități de măsură pentru arie. Aria pătratului și aria dreptunghiului. Transformări.....	165
Lecția 3. Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și volumul paralelipipedului dreptunghic. Transformări.....	169
<i>Test de autoevaluare</i>	173
Recapitulare și sistematizare prin teste	175
 Teste de evaluare sumativă.....	179
 Teste pentru evaluarea finală.....	185
 SOLUȚII.....	188

Capitolul 1

FRAȚII ORDINARE

Lecția 1. Frații ordinare. Clasificarea fracțiilor ordinare

1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

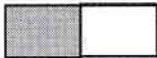


Definiție: Fie a și b două numere naturale cu $b \neq 0$. Se numește **fracție** $\frac{a}{b}$

câtul neefectuat al împărțirii lui a la b .

$\frac{a}{b}$ se citește „ a supra b ”.

a se numește **numărătorul** fracției, b se numește **numitorul** fracției.

Linia de fracție reprezintă operația de împărțire.

Exemple de fracții ordinare:  $\frac{1}{2}$  $\frac{2}{3}$  $\frac{1}{4}$

O fracție ordinară poate fi de trei tipuri: fracție subunitară, fracție echiunitară, fracție supraunitară.

Definiție: O fracție ordinară este **subunitară** dacă numărătorul este mai mic decât numitorul.

$\frac{a}{b}$ subunitară dacă $a < b$, $\frac{a}{b} < 1$

Exemplu: $\frac{2}{3}$ este subunitară, deoarece $2 < 3$.

Definiție: O fracție ordinară se numește **echiunitară** dacă numărătorul este egal cu numitorul.

$\frac{a}{b}$ echiunitară dacă $a = b$, $\frac{a}{b} = 1$

Exemplu: $\frac{2}{2}$ este echiunitară, deoarece $2 = 2$.

Definiție: O fracție ordinară este **supraunitară** dacă numărătorul este mai mare decât numitorul.

$\frac{a}{b}$ supraunitară dacă $a > b$, $\frac{a}{b} > 1$

Exemplu: $\frac{6}{5}$ este supraunitară, deoarece $6 > 5$.

1. Fie fracțiile ordinare: $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{6}, \frac{8}{3}, \frac{5}{9}, \frac{9}{4}, \frac{9}{9}$. Scrieți fracțiile:

- a) echiunitare; b) supraunitare; c) subunitare.

Soluție: a) $\frac{6}{6}, \frac{9}{9}$; b) $\frac{8}{3}, \frac{9}{4}$; c) $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}$.

2. a) Scrieți fracția echiunitară având numărătorul 11.
 b) Scrieți toate fracțiile subunitare având numitorul 5.
 c) Scrieți toate fracțiile supraunitare având numărătorul 6.

Soluție: a) $\frac{11}{11}$; b) $\frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$; c) $\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{6}{4}, \frac{6}{5}$.

3. a) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{13}{2x-1}$ este echiunitară.

b) Aflați numărul natural nenul x , știind că fracția $\frac{13}{2x-1}$ este supraunitară.

c) Aflați numărul natural nenul x , știind că fracția $\frac{13}{2x-1}$ este subunitară.

Soluție: a) $2x - 1 = 13 \Leftrightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$.

b) $13 > 2x - 1 \Leftrightarrow 2x < 14 \Rightarrow x < 7 \Rightarrow x$ poate fi 1, 2, 3, 4, 5, 6.

c) $13 < 2x - 1 \Leftrightarrow 2x > 14 \Rightarrow x > 7 \Rightarrow x$ poate fi 8, 9, 10, ...

4. a) Scrieți toate fracțiile supraunitare de forma $\frac{\overline{2x}}{x^2}$.

b) Scrieți toate fracțiile subunitare având numărătorul cuprins între 6 și 10 și numitorul cuprins între 4 și 12.

c) Scrieți toate fracțiile echiunitare de forma $\frac{\overline{ab}}{a^2}$.

Soluție: a) $\overline{2x} > x^2 \Rightarrow$ fracție supraunitară $\frac{21}{12}$.

b) Frații subunitare: $\frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{10}, \frac{7}{11}, \frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{8}{11}, \frac{9}{10}, \frac{9}{11}$.

c) $\overline{ab} = \overline{a^2} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow$ fracțiile echiunitare $\frac{\overline{a^2}}{a^2}$ sunt $\frac{12}{12}, \frac{22}{22}, \frac{32}{32}, \frac{42}{42}, \frac{52}{52}, \frac{62}{62}$,

$\frac{72}{72}, \frac{82}{82}, \frac{92}{92}$.

Standard minimal

1. Fie fracțiile: $\frac{2}{10}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{3x}{2x}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{1x}{2x}$. Identificați fracțiile:

- a) subunitare; b) supraunitare; c) echiuunitare.

2. a) Scrieți fracțiile supraunitare cu numărătorul 7.

b) Scrieți fracțiile subunitare cu numitorul 7.

c) Scrieți fracțiile echiuunitare cu numărătorul cuprins între 2 și 5 și numitorul cuprins între 2 și 7.

d) Scrieți toate fracțiile supraunitare având numărătorul cifră pară, iar numitorul cifră impară.

3. a) Scrieți toate fracțiile $\frac{a}{b}$ subunitare cu $a \mid 6$ și $b \mid 4$.

b) Scrieți toate fracțiile subunitare de forma $\frac{5x}{xy}$ cu $xy : 10$.

c) Scrieți toate fracțiile supraunitare de forma $\frac{3x}{x^2}$ cu $3x : 3$.

d) Scrieți toate fracțiile echiuunitare de forma $\frac{ab}{ba}$.

4. a) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{12}{x}$ este subunitară.

b) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{20}{x+2}$ este supraunitară.

c) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{2x-26}{14}$ este echiuunitară.

d) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{3x+1}{22}$ este subunitară.

5. Scrieți sub formă de fracție ordinară:

a) o șesime;

b) două cincimi;

c) trei zecimi;

d) trei sferturi;

e) o treime;

f) o doime.

6. Demonstrați că fracția $\frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ba} + \overline{cb} + \overline{ac}}{22 \cdot (a + b + c)}$ este echiunitară.
7. Fie fracțiile $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$, unde \overline{ab} este pătrat perfect, iar \overline{cd} este multiplu de 30.
- Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Scrieți toate fracțiile supraunitare.
 - Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.
8. Fie fracțiile $\frac{\overline{ab}}{\overline{cl}}$, unde $\overline{ab} : 10$ și \overline{cl} este prim.
- Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Scrieți toate fracțiile supraunitare.
 - Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.
9. Fie fracțiile $\frac{\overline{5x}}{\overline{y4}}$, cu $\overline{5x} : 2$ și $\overline{y4} : 3$.
- Scrieți toate fracțiile supraunitare.
 - Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.
10. Demonstrați că dacă fracția $\frac{a}{b}$ este supraunitară, atunci fracția $\frac{2 \cdot \overline{ab} + 3 \cdot \overline{ba}}{5 \cdot \overline{aa}}$ este subunitară.
11. Fie fracțiile $\frac{\overline{x3}}{\overline{3y}}$, unde $\overline{x3}$ este număr compus, iar $\overline{3y} : 9$.
- Scrieți toate fracțiile supraunitare.
 - Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.
12. Fie fracțiile $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$, cu $\overline{ab} : 10$, $\overline{ab} : 3$ și $\overline{cd} | 40$.
- Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Scrieți toate fracțiile supraunitare.

13. Fie fracțiile $\frac{\overline{abc}}{\overline{def}}$, unde \overline{abc} este cub perfect, $\overline{def} : 9$ și $\overline{def} : 10$. Scrieți toate fracțiile supraunitare.

Excelență (aprofundare)

14. Aflați toate perechile de numere prime (x, y) pentru care fracția $\frac{2024}{x^2 + 7y^2}$ este echiunitară.

15. Demonstrați că fracția $\frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2024}}{2^{201} \cdot 4^{462} \cdot 8^{300} - 2}$ este supraunitară.

16. Aflați numerele naturale x și y pentru care fracția $\frac{2026}{x^3 + y^2}$ este echiunitară.

17. Demonstrați că fracția $\frac{1 + 3 + 5 + \dots + 2025}{2 + 4 + 6 + \dots + 2026}$ este subunitară.

18. Aflați câte fracții supraunitare de forma $\frac{2026}{x^2 + x}$ există, unde x este un număr natural nenul.

19. Aflați câte fracții subunitare de forma $\frac{x^2 - x}{2026}$ există, unde x este un număr natural nenul.

20. Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{2026}{x^3 + (x + 44)^2}$ este echiunitară.

Lecția 2. Frații echivalente

1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

Definiție: Două fracții ordinare sunt **echivalente** dacă sunt egale.

Formule: • $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dacă $ad = bc$; • $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ dacă $ad \neq bc$;

• dacă $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ și $a \neq 0 \Rightarrow b = c$; • dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \Rightarrow a = c$.

Exemple:

• Frațiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$ sunt echivalente, deoarece $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, $4 = 4$;

• Frațiile $\frac{1}{4}$ și $\frac{2}{3}$ nu sunt echivalente, deoarece $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{3}$, $1 \cdot 3 \neq 2 \cdot 4$, $3 \neq 8$.

2 SĂ ÎNVĂȚĂM ÎMPREUNĂ

1. Demonstrați că fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{1}{5}$ și $\frac{5}{25}$;

b) $\frac{3}{2}$ și $\frac{30}{20}$;

c) $\frac{5}{4}$ și $\frac{10}{8}$.

Soluție: a) $\frac{1}{5} = \frac{5}{25}$, deoarece $1 \cdot 25 = 5 \cdot 5$, $25 = 25$.

b) $\frac{3}{2} = \frac{30}{20}$, deoarece $3 \cdot 20 = 2 \cdot 30$, $60 = 60$.

c) $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$, deoarece $5 \cdot 8 = 10 \cdot 4$, $40 = 40$.

2. Demonstrați că fracțiile nu sunt echivalente:

a) $\frac{3}{2}$ și $\frac{1}{4}$;

b) $\frac{7}{5}$ și $\frac{1}{2}$;

c) $\frac{\overline{3x}}{5}$ și $\frac{\overline{2y}}{7}$.

Soluție: a) $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{4}$, deoarece $3 \cdot 4 \neq 2 \cdot 1$, $12 \neq 2$.

b) $\frac{7}{5} \neq \frac{1}{2}$, deoarece $7 \cdot 2 \neq 1 \cdot 5$, $14 \neq 5$.

c) $\frac{\overline{3x}}{5} \neq \frac{\overline{2y}}{7}$, deoarece $7 > 5$, $\overline{3x} > \overline{2y} \Rightarrow 7 \cdot \overline{3x} > 5 \cdot \overline{2y} \Rightarrow 7 \cdot \overline{3x} \neq 5 \cdot \overline{2y}$.

3. Aflați numărul natural x , pentru care fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{1}{x+3}$ și $\frac{1}{8}$;

b) $\frac{1}{2x-3}$ și $\frac{1}{5}$;

c) $\frac{x}{8}$ și $\frac{8}{x}$;

d) $\frac{16}{2^x}$ și $\frac{1}{64}$.

Soluție: a) $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{8} \Rightarrow x+3 = 8 \Rightarrow x = 5$.

b) $\frac{1}{2x-3} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2x-3 = 5, 2x = 8, x = 4$.

c) $\frac{x}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow x^2 = 8^2 \Rightarrow x = 8$.

d) $\frac{16}{2^x} = \frac{1}{64} \Rightarrow 2^x = 2^6 + 2^4 \Rightarrow 2^x = 2^{10} \Rightarrow x = 10$.

3 CUM APLIC CE AM ÎNVĂȚAT

Standard minimal

1. Demonstrați că fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{2}{9}$ și $\frac{6}{27}$;

b) $\frac{3}{7}$ și $\frac{15}{35}$;

c) $\frac{8}{3}$ și $\frac{24}{9}$;

d) $\frac{3}{11}$ și $\frac{9}{33}$.

2. Demonstrați că fracțiile nu sunt echivalente:

a) $\frac{1}{10}$ și $\frac{1}{11}$;

b) $\frac{2}{13}$ și $\frac{2}{7}$;

c) $\frac{7}{10}$ și $\frac{5}{10}$;

d) $\frac{8}{3}$ și $\frac{7}{4}$.

3. Studiați care fracții sunt echivalente și care fracții nu sunt echivalente:

a) $\frac{2}{12}$ și $\frac{1}{6}$;

b) $\frac{36}{72}$ și $\frac{1}{2}$;

c) $\frac{3}{2}$ și $\frac{1}{15}$;

d) $\frac{8x}{2}$ și $\frac{1}{3}$.

4. Aflați numărul x , știind că fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$;

b) $\frac{6}{x} = \frac{1}{12}$;

c) $\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$;

d) $\frac{2}{5} = \frac{12}{x}$;

e) $\frac{x-1}{4} = 2$.

5. Dacă $\frac{24}{a} = \frac{b}{5}$, calculați $9ab + 120$.

6. Scrieți patru fracții echivalente cu fracția $\frac{2}{3}$.

7. Aflați numărul natural x pentru care fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{8}{x^2}$ și $\frac{x}{64}$;

b) $\frac{3}{2x-1}$ și $\frac{1}{27}$;

c) $\frac{x-4}{6}$ și 5;

d) $\frac{3x-1}{29}$ și 1;

e) $\frac{3^x}{27}$ și 243;

f) $\frac{8}{2^x}$ și $\frac{1}{1024}$.

8. Aflați numărul natural x , știind că:

a) $\frac{3x-1}{x+1} = 1$;

b) $\frac{5x-2}{2x-3} = \frac{13}{3}$;

c) $\frac{7x-2}{5} = \frac{33}{5}$;

d) $\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{13}{16}$.

9. Aflați numărul natural x , știind că:

a) $\frac{\overline{2x}}{\overline{3x}} = \frac{2}{3}$;

b) $\frac{\overline{5x}}{\overline{x5}} = \frac{17}{5}$;

c) $\frac{\overline{4x}}{\overline{8x}} = \frac{11}{21}$;

d) $\frac{\overline{xx}}{\overline{2x}} = \frac{11}{6}$.

10. Aflați numărul natural x , știind că:

a) $\frac{2(x+1)+3}{3} = 3$;

b) $\frac{3(2x-1)+5}{7} = \frac{52}{14}$;

c) $\frac{3}{x+1} = \frac{x+1}{12}$;

d) $\frac{x-5}{5} = \frac{125}{x-5}$.

11. Scrieți patru fracții de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$ echivalente cu fracția $\frac{1}{4}$.

12. Aflați numărul natural x , știind că $\frac{1}{x^2+4x} = \frac{x^2+4x}{2025}$.

13. Aflați numerele naturale x și y , știind că $\overline{12x} : 5$ și că fracțiile $\frac{\overline{12x}}{5}$ și $\frac{y}{3}$ sunt echivalente.

14. Aflați perechile de numere naturale (a, b) pentru care fracțiile $\frac{a}{2027}$ și $\frac{1}{b+1}$ sunt echivalente.

15. Dacă $n \geq 2$ este număr natural, demonstrați că fracțiile $\frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{n}$ și

$\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+2n}$ nu pot fi echivalente. (Se poate folosi faptul că $2^n > n$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.)

16. Aflați numărul natural x , știind că:

$$\frac{x^2}{2025} = \frac{1}{(x+4)^2}.$$

17. Aflați numărul natural n , știind că:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 72,$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

18. Aflați numărul natural n , știind că:

$$\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n} = \frac{2025}{2026}.$$

19. Dacă a, b, m, n sunt numere naturale nenule, cu $m \neq n$ și $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a+m}{b+m}$, demonstrați că $a = b$.

20. Aflați numerele naturale n , știind că $\frac{1+2+3+\dots+n}{1+3+\dots+(2n-1)}$ este subunitară.

Lecția 3. Amplificarea și simplificarea fracțiilor.

Fracții ireductibile. Fracții reductibile

1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

Definiție: A **amplifica** o fracție cu un număr înseamnă a înmulți și numărătorul, și numitorul cu acel număr, obținându-se două fracții egale.

Formulă:
$${}^c) \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Exemplu:
$${}^5) \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

Definiție: A **simplifica** o fracție cu un număr înseamnă a împărți și numărătorul, și numitorul cu acel număr, obținându-se două fracții egale.

Există fracții care nu se pot simplifica printr-un număr diferit de 1.

Pentru a simplifica o fracție cu un număr trebuie să găsim un divizor comun pentru numărătorul și numitorul fracției.

Formulă:
$${}^c) \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

Exemple: • $\frac{120^{(5)}}{25} = \frac{24}{5}$;

• $\frac{12}{36}$. Avem $12 \mid 12$ și $12 \mid 36$, deci 12 este un divizor comun pentru numără-

torul și numitorul fracției. Așadar, $\frac{12^{(12)}}{36} = \frac{12 : 12}{36 : 12} = \frac{1}{3}$.

Definiție: O fracție ordinară se numește **ireductibilă** dacă singurul divizor comun al numărătorului și numitorului ei este 1.

Exemplu: $\frac{2}{3}$ este ireductibilă, $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$.

Definiție: O fracție ordinară se numește **reductibilă** dacă nu este ireductibilă.

O fracție reductibilă se poate simplifica printr-un număr diferit de 1.

Exemplu: $\frac{24}{26}$ este reductibilă, deoarece se poate simplifica prin $2 \neq 1$; $24 : 2$

și $26 : 2$.