George-Florin Șerban

MATEMATICĂ STANDARD

Aritmetică • Algebră • Geometrie

Clasa a V-a

Partea a II-a. Modulele 3, 4 și 5

EDITURA COMPER

Cuprins

Capitolul 1
FRACȚII ORDINARE

Lecția 1. Fracții ordinare. Clasificarea fracțiilor ordinare

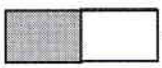
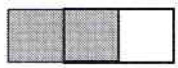
1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

Definiție: Fie a și b două numere naturale cu $b \neq 0$. Se numește **fracție** $\frac{a}{b}$ câtul neefectuat al împărțirii lui a la b.

$\frac{a}{b}$ se citește „a supra b”.

a se numește **numărătorul** fracției, b se numește **numitorul** fracției.

Linia de fracție reprezintă operația de împărțire.

Exemple de fracții ordinare:  $\frac{1}{2}$  $\frac{2}{3}$  $\frac{1}{4}$

O fracție ordinară poate fi de trei tipuri: fracție subunitară, fracție echiunitară, fracție supraunitară.

Definiție: O fracție ordinară este **subunitară** dacă numărătorul este mai mic decât numitorul.

$$\frac{a}{b} \text{ subunitară dacă } a < b,\ \frac{a}{b} < 1$$

Exemplu: $\frac{2}{3}$ este subunitară, deoarece $2 < 3$.

Definiție: O fracție ordinară se numește **echiunitară** dacă numărătorul este egal cu numitorul.

$$\frac{a}{b} \text{ echiunitară dacă } a = b,\ \frac{a}{b} = 1$$

Exemplu: $\frac{2}{2}$ este echiunitară, deoarece $2 = 2$.

Definiție: O fracție ordinară este **supraunitară** dacă numărătorul este mai mare decât numitorul.

$$\frac{a}{b} \text{ supraunitară dacă } a > b,\ \frac{a}{b} > 1$$

Exemplu: $\frac{6}{5}$ este supraunitară, deoarece $6 > 5$.

2 SĂ ÎNVĂȚĂM ÎMPREUNĂ

1. Fie fracțiile ordinare: $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{6}, \frac{8}{3}, \frac{5}{9}, \frac{9}{4}, \frac{9}{9}$. Scrieți fracțiile:

a) echiunitare; b) supraunitare; c) subunitare.

Soluție: a) $\frac{6}{6}, \frac{9}{9}$; b) $\frac{8}{3}, \frac{9}{4}$; c) $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}$.

2. a) Scrieți fracția echiunitară având numărătorul 11.
b) Scrieți toate fracțiile subunitare având numitorul 5.
c) Scrieți toate fracțiile supraunitare având numărătorul 6.

Soluție: a) $\frac{11}{11}$; b) $\frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$; c) $\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{6}{4}, \frac{6}{5}$.

3. a) Aflați numărul natural x, știind că fracția $\frac{13}{2x-1}$ este echiunitară.

b) Aflați numărul natural nenul x, știind că fracția $\frac{13}{2x-1}$ este supraunitară.

c) Aflați numărul natural nenul x, știind că fracția $\frac{13}{2x-1}$ este subunitară.

Soluție: a) $2x - 1 = 13 \Leftrightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$.
b) $13 > 2x - 1 \Leftrightarrow 2x < 14 \Rightarrow x < 7 \Rightarrow x$ poate fi 1, 2, 3, 4, 5, 6.
c) $13 < 2x - 1 \Leftrightarrow 2x > 14 \Rightarrow x > 7 \Rightarrow x$ poate fi 8, 9, 10, ...

4. a) Scrieți toate fracțiile supraunitare de forma $\frac{\overline{2x}}{\overline{x2}}$.

b) Scrieți toate fracțiile subunitare având numărătorul cuprins între 6 și 10 și numitorul cuprins între 4 și 12.

c) Scrieți toate fracțiile echiunitare de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{a2}}$.

Soluție: a) $\overline{2x} > \overline{x2} \Rightarrow$ fracție supraunitară $\frac{21}{12}$.

b) Fracții subunitare: $\frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{10}, \frac{7}{11}, \frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{8}{11}, \frac{9}{10}, \frac{9}{11}$.

c) $\overline{ab} = \overline{a2} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow$ fracțiile echiunitare $\frac{\overline{a2}}{\overline{a2}}$ sunt $\frac{12}{12}, \frac{22}{22}, \frac{32}{32}, \frac{42}{42}, \frac{52}{52}, \frac{62}{62}, \frac{72}{72}, \frac{82}{82}, \frac{92}{92}$.

3 CUM APLIC CE AM ÎNVĂȚAT

Standard minimal

1. Fie fracțiile: $\frac{2}{10}, \frac{7}{3}, \frac{5}{5}, \frac{\overline{3x}}{\overline{2x}}, \frac{3}{11}, \frac{8}{8}, \frac{11}{3}, \frac{\overline{1x}}{\overline{2x}}$. Identificați fracțiile:

a) subunitare; b) supraunitare; c) echiunitare.

2. a) Scrieți fracțiile supraunitare cu numărătorul 7.

b) Scrieți fracțiile subunitare cu numitorul 7.

c) Scrieți fracțiile echiunitare cu numărătorul cuprins între 2 și 5 și numitorul cuprins între 2 și 7.

d) Scrieți toate fracțiile supraunitare având numărătorul cifră pară, iar numitorul cifră impară.

3. a) Scrieți toate fracțiile $\frac{a}{b}$ subunitare cu $a \mid 6$ și $b \mid 4$.

b) Scrieți toate fracțiile subunitare de forma $\frac{\overline{5x}}{\overline{xy}}$ cu $\overline{xy} \vdots 10$.

c) Scrieți toate fracțiile supraunitare de forma $\frac{\overline{3x}}{\overline{x2}}$ cu $\overline{3x} \vdots 3$.

d) Scrieți toate fracțiile echiunitare de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$.

4. a) Aflați numărul natural x, știind că fracția $\frac{12}{x}$ este subunitară.

b) Aflați numărul natural x, știind că fracția $\frac{20}{x+2}$ este supraunitară.

c) Aflați numărul natural x, știind că fracția $\frac{2x-26}{14}$ este echiunitară.

d) Aflați numărul natural x, știind că fracția $\frac{3x+1}{22}$ este subunitară.

5. Scrieți sub formă de fracție ordinară:

a) o șesime; b) două cincimi; c) trei zecimi;

d) trei sferturi; e) o treime; f) o doime.

Standard consolidare

6. Demonstrați că fracția $\dfrac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{ba}+\overline{cb}+\overline{ac}}{22\cdot(a+b+c)}$ este echiunitară.

7. Fie fracțiile $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$, unde $\overline{ab}$ este pătrat perfect, iar $\overline{cd}$ este multiplu de 30.

a) Scrieți toate fracțiile subunitare.
b) Scrieți toate fracțiile supraunitare.
c) Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.

8. Fie fracțiile $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{c1}}$, unde $\overline{ab} \vdots 10$ și $\overline{c1}$ este prim.

a) Scrieți toate fracțiile subunitare.
b) Scrieți toate fracțiile supraunitare.
c) Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.

9. Fie fracțiile $\dfrac{\overline{5x}}{\overline{y4}}$, cu $\overline{5x} \vdots 2$ și $\overline{y4} \vdots 3$.

a) Scrieți toate fracțiile supraunitare.
b) Scrieți toate fracțiile subunitare.
c) Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.

10. Demonstrați că dacă fracția $\dfrac{a}{b}$ este supraunitară, atunci fracția $\dfrac{2\cdot\overline{ab}+3\cdot\overline{ba}}{5\cdot\overline{aa}}$ este subunitară.

11. Fie fracțiile $\dfrac{\overline{x3}}{\overline{3y}}$, unde $\overline{x3}$ este număr compus, iar $\overline{3y} \vdots 9$.

a) Scrieți toate fracțiile supraunitare.
b) Scrieți toate fracțiile subunitare.
c) Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.

12. Fie fracțiile $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$, cu $\overline{ab} \vdots 10$, $\overline{ab} \vdots 3$ și $\overline{cd} \mid 40$.

a) Scrieți toate fracțiile subunitare.
b) Scrieți toate fracțiile supraunitare.

13. Fie fracțiile $\dfrac{\overline{abc}}{\overline{def}}$, unde $\overline{abc}$ este cub perfect, $\overline{def} \,\vdots\, 9$ și $\overline{def} \,\vdots\, 10$. Scrieți toate fracțiile supraunitare.

Excelență (aprofundare)

14. Aflați toate perechile de numere prime (x, y) pentru care fracția $\dfrac{2024}{x^2+7y^2}$ este echiunitară.

15. Demonstrați că fracția $\dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^{2024}}{2^{201}\cdot 4^{462}\cdot 8^{300}-2}$ este supraunitară.

16. Aflați numerele naturale x și y pentru care fracția $\dfrac{2026}{x^3+y^2}$ este echiunitară.

17. Demonstrați că fracția $\dfrac{1+3+5+\ldots+2025}{2+4+6+\ldots+2026}$ este subunitară.

18. Aflați câte fracții supraunitare de forma $\dfrac{2026}{x^2+x}$ există, unde x este un număr natural nenul.

19. Aflați câte fracții subunitare de forma $\dfrac{x^2-x}{2026}$ există, unde x este un număr natural nenul.

20. Aflați numărul natural x, știind că fracția $\dfrac{2026}{x^3+(x+44)^2}$ este echiunitară.

Lecția 2. Fracții echivalente

1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

Definiție: Două fracții ordinare sunt **echivalente** dacă sunt egale.

Formule: • $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ dacă $ad=bc$; • $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ dacă $ad\neq bc$;

• dacă $\frac{a}{b}=\frac{a}{c}$ și $a\neq 0 \Rightarrow b=c$; • dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{b}\Rightarrow a=c$.

Exemple:

• Fracțiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$ sunt echivalente, deoarece $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, $1\cdot 4=2\cdot 2$, $4=4$;

• Fracțiile $\frac{1}{4}$ și $\frac{2}{3}$ nu sunt echivalente, deoarece $\frac{1}{4}\neq\frac{2}{3}$, $1\cdot 3\neq 2\cdot 4$, $3\neq 8$.

2 SĂ ÎNVĂȚĂM ÎMPREUNĂ

1. Demonstrați că fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{1}{5}$ și $\frac{5}{25}$; b) $\frac{3}{2}$ și $\frac{30}{20}$; c) $\frac{5}{4}$ și $\frac{10}{8}$.

Soluție: a) $\frac{1}{5}=\frac{5}{25}$, deoarece $1\cdot 25=5\cdot 5$, $25=25$.

b) $\frac{3}{2}=\frac{30}{20}$, deoarece $3\cdot 20=2\cdot 30$, $60=60$.

c) $\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$, deoarece $5\cdot 8=10\cdot 4$, $40=40$.

2. Demonstrați că fracțiile nu sunt echivalente:

a) $\frac{3}{2}$ și $\frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{5}$ și $\frac{1}{2}$; c) $\frac{\overline{3x}}{5}$ și $\frac{\overline{2y}}{7}$.

Soluție: a) $\frac{3}{2}\neq\frac{1}{4}$, deoarece $3\cdot 4\neq 2\cdot 1$, $12\neq 2$.

b) $\frac{7}{5}\neq\frac{1}{2}$, deoarece $7\cdot 2\neq 1\cdot 5$, $14\neq 5$.

c) $\frac{\overline{3x}}{5}\neq\frac{\overline{2y}}{7}$, deoarece $7>5$, $\overline{3x}>\overline{2y}\Rightarrow 7\cdot\overline{3x}>5\cdot\overline{2y}\Rightarrow 7\cdot\overline{3x}\neq 5\cdot\overline{2y}$.

3. Aflați numărul natural x, pentru care fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{1}{x+3}$ și $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{2x-3}$ și $\frac{1}{5}$;

c) $\frac{x}{8}$ și $\frac{8}{x}$; d) $\frac{16}{2^x}$ și $\frac{1}{64}$.

Soluție: a) $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{8} \Rightarrow x+3=8 \Rightarrow x=5$.

b) $\frac{1}{2x-3} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2x-3=5,\ 2x=8,\ x=4$.

c) $\frac{x}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow x^2 = 8^2 \Rightarrow x=8$.

d) $\frac{16}{2^x} = \frac{1}{64} \Rightarrow 2^x = 2^6 + 2^4 \Rightarrow 2^x = 2^{10} \Rightarrow x = 10$.

3 CUM APLIC CE AM ÎNVĂȚAT

Standard minimal

1. Demonstrați că fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{2}{9}$ și $\frac{6}{27}$; b) $\frac{3}{7}$ și $\frac{15}{35}$; c) $\frac{8}{3}$ și $\frac{24}{9}$; d) $\frac{3}{11}$ și $\frac{9}{33}$.

2. Demonstrați că fracțiile nu sunt echivalente:

a) $\frac{1}{10}$ și $\frac{1}{11}$; b) $\frac{2}{13}$ și $\frac{2}{7}$; c) $\frac{7}{10}$ și $\frac{5}{10}$; d) $\frac{8}{3}$ și $\frac{7}{4}$.

3. Studiați care fracții sunt echivalente și care fracții nu sunt echivalente:

a) $\frac{2}{12}$ și $\frac{1}{6}$; b) $\frac{36}{72}$ și $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{2}$ și $\frac{1}{15}$; d) $\frac{\overline{8x}}{2}$ și $\frac{1}{3}$.

4. Aflați numărul x, știind că fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$; b) $\frac{6}{x} = \frac{1}{12}$; c) $\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$;

d) $\frac{2}{5} = \frac{12}{x}$; e) $\frac{x-1}{4} = 2$.

5. Dacă $\frac{24}{a} = \frac{b}{5}$, calculați $9ab + 120$.

Standard consolidare

6. Scrieți patru fracții echivalente cu fracția $\frac{2}{3}$.

7. Aflați numărul natural x pentru care fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{8}{x^2}$ și $\frac{x}{64}$; b) $\frac{3}{2x-1}$ și $\frac{1}{27}$; c) $\frac{x-4}{6}$ și 5;

d) $\frac{3x-1}{29}$ și 1; e) $\frac{3^x}{27}$ și 243; f) $\frac{8}{2^x}$ și $\frac{1}{1024}$.

8. Aflați numărul natural x, știind că:

a) $\frac{3x-1}{x+1}=1$; b) $\frac{5x-2}{2x-3}=\frac{13}{3}$;

c) $\frac{7x-2}{5}=\frac{33}{5}$; d) $\frac{2x+3}{3x+1}=\frac{13}{16}$.

9. Aflați numărul natural x, știind că:

a) $\frac{\overline{2x}}{\overline{3x}}=\frac{2}{3}$; b) $\frac{\overline{5x}}{\overline{x5}}=\frac{17}{5}$;

c) $\frac{\overline{4x}}{\overline{8x}}=\frac{11}{21}$; d) $\frac{\overline{xx}}{\overline{2x}}=\frac{11}{6}$.

10. Aflați numărul natural x, știind că:

a) $\frac{2(x+1)+3}{3}=3$; b) $\frac{3(2x-1)+5}{7}=\frac{52}{14}$;

c) $\frac{3}{x+1}=\frac{x+1}{12}$; d) $\frac{x-5}{5}=\frac{125}{x-5}$.

11. Scrieți patru fracții de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$ echivalente cu fracția $\frac{1}{4}$.

12. Aflați numărul natural x, știind că $\frac{1}{x^2+4x}=\frac{x^2+4x}{2025}$.

13. Aflați numerele naturale x și y, știind că $\overline{12x} \vdots 5$ și că fracțiile $\frac{\overline{12x}}{5}$ și $\frac{y}{3}$ sunt echivalente.

Excelență (aprofundare)

14. Aflați perechile de numere naturale (a, b) pentru care fracțiile $\frac{a}{2027}$ și $\frac{1}{b+1}$ sunt echivalente.

15. Dacă $n \geq 2$ este număr natural, demonstrați că fracțiile $\frac{1+2+2^2+...+2^n}{n}$ și $\frac{1+2+3+...+n}{n^2+2n}$ nu pot fi echivalente. (Se poate folosi faptul că $2^n > n$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.)

16. Aflați numărul natural x, știind că:

$$\frac{x^2}{2025} = \frac{1}{(x+4)^2}.$$

17. Aflați numărul natural n, știind că:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 72,$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

18. Aflați numărul natural n, știind că:

$$\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n} = \frac{2025}{2026}.$$

19. Dacă a, b, m, n sunt numere naturale nenule, cu $m \neq n$ și $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a+m}{b+m}$, demonstrați că $a = b$.

20. Aflați numerele naturale n, știind că $\frac{1+2+3+...+n}{1+3+...+(2n-1)}$ este subunitară.

Lecția 3. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile. Fracții reductibile

❶ CE TREBUIE SĂ REȚIN

Definiție: A amplifica o fracție cu un număr înseamnă a înmulți și numărătorul, și numitorul cu acel număr, obținându-se două fracții egale.

Formulă: $^{c)}\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot c}$.

Exemplu: $^{5)}\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\dfrac{10}{15}$.

Definiție: A simplifica o fracție cu un număr înseamnă a împărți și numărătorul, și numitorul cu acel număr, obținându-se două fracții egale.

Există fracții care nu se pot simplifica printr-un număr diferit de 1.

Pentru a simplifica o fracție cu un număr trebuie să găsim un divizor comun pentru numărătorul și numitorul fracției.

Formulă: $\dfrac{a}{b}^{(c}=\dfrac{a:c}{b:c}$.

Exemple: • $\dfrac{120}{25}^{(5}=\dfrac{24}{5}$;

• $\dfrac{12}{36}$. Avem $12 \mid 12$ și $12 \mid 36$, deci 12 este un divizor comun pentru numărătorul și numitorul fracției. Așadar, $\dfrac{12}{36}^{(12}=\dfrac{12:12}{36:12}=\dfrac{1}{3}$.

Definiție: O fracție ordinară se numește **ireductibilă** dacă singurul divizor comun al numărătorului și numitorului ei este 1.

Exemplu: $\dfrac{2}{3}$ este ireductibilă, $2 = 2 \cdot 1$, $3 = 3 \cdot 1$.

Definiție: O fracție ordinară se numește **reductibilă** dacă nu este ireductibilă.

O fracție reductibilă se poate simplifica printr-un număr diferit de 1.

Exemplu: $\dfrac{24}{26}$ este reductibilă, deoarece se poate simplifica prin $2 \neq 1$; $24 \vdots 2$ și $26 \vdots 2$.